

1.7. Performanțele codurilor LDPC

- Metrica folosită pentru evaluarea performanțelor codurilor LDPC este câștigul codării față de transmisia necodată care folosește aceeași modulație.
- Calculul teoretic al performanțelor asigurate de codurile LDPC este extrem de complex. În literatură nu există o formulă care să dea expresia probabilității de eroare după decodare, în funcție de SNR, pentru codurile LDPC.
- De aceea valorile acestei probabilități se obțin prin simulări, explicarea valorilor lor fiind făcută prin raționamente și metode care folosesc o serie de parametri ai codurilor (dimensiuni, mod de construcție a matricii H) și ai algoritmului de decodare.

1.7.1. Parametrii principali care afectează performanțele codurilor LDPC

- Cei mai importanți parametri care afectează câștigul codării asigurat de un cod LDPC sunt:
 - tipul codul, dictat de modalitatea de construcție a matricii H
 - rata codului
 - lungimea cuvântului de cod
 - valorile parametrilor k și j
 - diametrul buclei minime (girth); acesta este corelat cu valorile parametrilor j și k
 - numărul maxim de iterații efectuate de algoritmul de decodare
- în continuare vor fi prezentate unele rezultate obținute pentru coduri random în [1] și în final vor fi făcute unele considerații privind codurile de tip „array” cu matrice triangularizată.
- capacitatea de corecție a codului e măsurată prin câștigul codării C_G , definit în (27), folosind modulația 2-PSK pe un canal AWGN și pentru un BER de referință $BER_r = 1 \cdot 10^{-6}$:

$$C_G = SNR_n|_{BER_r} - SNR_c|_{BER_r} \quad (27)$$

a. Efectul parametrilor j și k și al diametrului buclei minime

- Pentru a pune în evidență efectul acestor parametri, se vor prezenta curbele BER vs. SNR ale unor coduri având aproximativ aceeași rată, adică același raport între j și k , și aceeași lungime.
- figura 8 prezintă curbele BER vs. SNR ale unor coduri cu $N = 1200$ biți/cuvânt de cod și $R_c = 0.5$.
- tabelul 1 prezintă valoarea media a girth-ului și câștigul codării.

1200	k=4 j=2	k=6 j=3	k=8 j=4	k=10 j=5
g_{av}	12,26	7.27	6.02	6
C_G (dB)	7	10	9.5	9

Tabelul 1

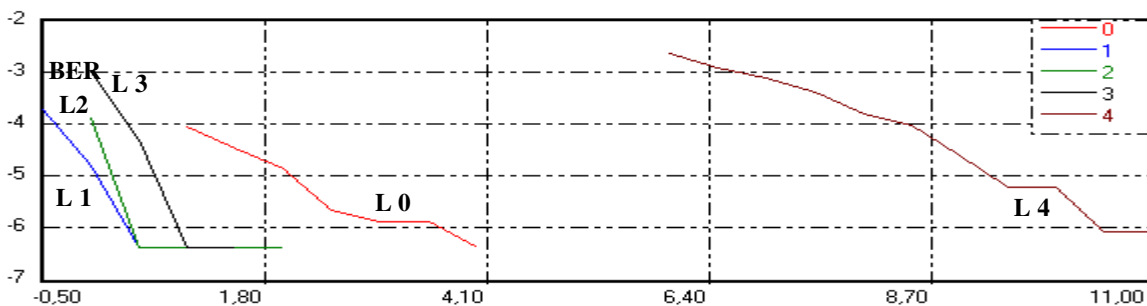


Fig.8 BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 1; $N = 1200$, $R_c = 0.5$
 Linia 0 – $k=4$, $j=2$; Linia 1 – $k=6$, $j=3$; Linia 2 – $k=8$, $j=4$; Linia 3 – $k=10$, $j=5$; Linia 4 – nc

- Rezultatele de mai sus și simulări făcute pe coduri random având alte lungimi și rate arată că:
 - cel mai mare C_G se obține pentru $j = 3$
 - pentru $j \geq 3$, girth-ul mediu și cel minim scad cu creșterea lui j (la aceeași rată), iar câștigul codării scade odată cu scăderea girth-ului. Aceasta deoarece dacă un bit intră în mai multe ecuații (j mai mare) și numărul de biți care intră într-o ecuație crește (k mai mare), datorită păstrării ratei de codare, după câteva iterații apar bucle în graful Tanner asociat deoarece lungimea cuvântului de cod este finită
 - Un caz special în prezintă valoarea $j = 2$, care deși are un girth mai mare, asigură un câștig al codării mai mic decât codurile generate cu j mai mare. Aceasta se explică prin numărul prea mic, $j = 2$, al ecuațiilor de control în care intră fiecare bit și implicit prin numărul mic de biți cu care acesta intră în aceste ecuații. Aceasta face ca valorile LLR-ului unui bit să se modifice puțin la fiecare iterație, chiar dacă buclele apar în graful Tanner după un număr mai mare de iterații.

b. Efectul lungimii cuvântului de cod

- Deoarece la punctul anterior s-a ajuns la concluzia că pentru $j = 3$ se obțin câștigurile maxime, se vor considera codurile cu $j = 3$ și rată $R_c = 0.5$

- Tabelul 2 prezintă C_G și girth-ul mediu pentru codurile cu $k = 6$ și $j = 3$ și trei valori ale lungimii cuvântului de cod N , iar figura 9 prezintă variațiile BER vs. SNR ale acestor coduri.

Tabelul 2 →

	1200	480	240
g_{av}	7.27	6.8	6.21
C_G	10	8.6	7.7

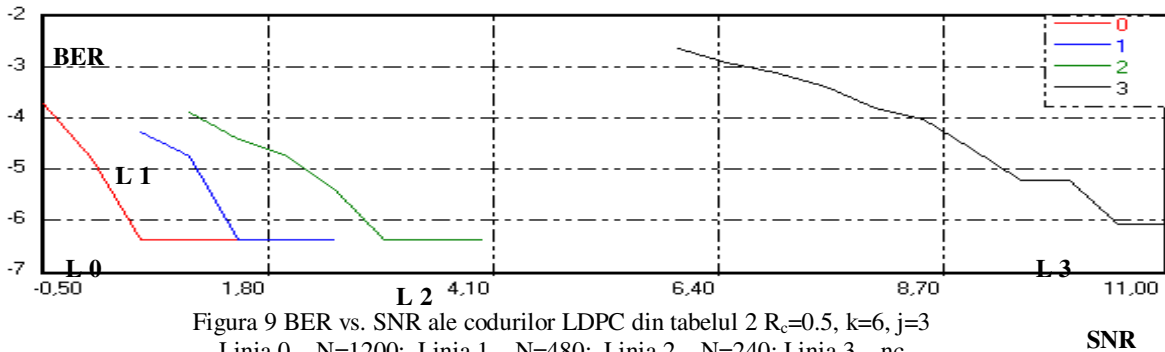


Figura 9 BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 2 $R_c=0.5$, $k=6$, $j=3$

Linia 0 – $N=1200$; Linia 1 – $N=480$; Linia 2 – $N=240$; Linia 3 – nc

- Rezultatele din figura 9 și din alte simulări efectuate arată că, în general, creșterea lungimii cuvântului de cod conduce la creșterea câștigului codării deoarece vor apărea bucle pentru un număr mai mic de biți la același număr de iterații

- Scăderea lui N sub $N = 200$ conduce la scăderea C_G la valori comparabile cu ale codurilor convoluționale cu $K = 7$

- De aceea în aplicațiile pe canale radio fixe, care au T_c mai mare, sunt utilizate coduri cu lungimi foarte mari ale cuvântului de cod ($N = 16000$, chiar 32000) care asigură câștiguri de 11-12 dB la rată $R_c=0.5$.

c. Efectul ratei codului

- Efectul modificării ratei codului asupra C_G și girth-ului este prezentat în tabelul 3 și figura 10 pentru coduri cu $j=3$ și $N = 1200$ biți/cuvântul de cod.

	$R_c=0.25$	$R_c=0.5$	$R_c=0.625$	$R_c=0.7$
g_{av}	8.62	7.27	6.67	7.4
C_G	13	10	8.5	8

Tabelul 3

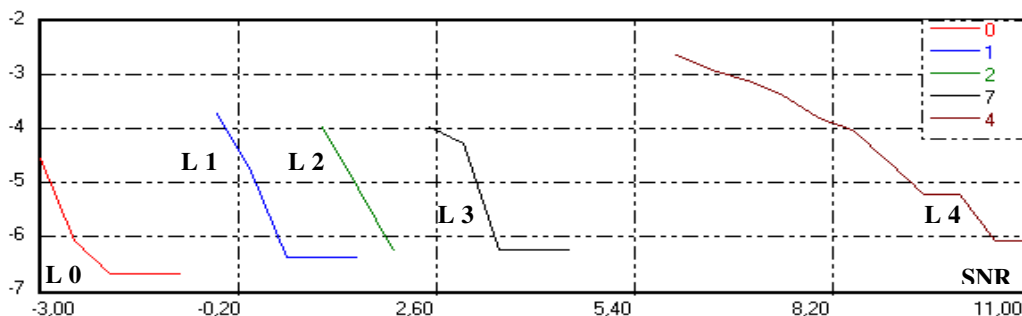


Figura 10. BER vs. SNR ale codurilor LDPC din tabelul 3 $N = 1200$, $j=3$

Linia 0 – $R_c=0.25$ ($k=4$); Linia 1 – $R_c=0.5$ ($k=6$); Linia 2 – $R_c=0.625$ ($k=8$); Linia 3 – $R_c=0.7$ ($k=10$); Linia 4 – nc

- Așa cum era de așteptat, la o lungime și un tip de cod date, cel mai mare câștig al codării îl asigură codurile cu rata cea mai mică.

- Considerând un cod cu $R_c = 1/4$ și modulația 16QAM → ca numărul de biți utili este $n=4 \cdot 1/4=1$ bit/simb; probabilitatea de eroare de simbol $p_e = 10^{-5}$ se asigură la $SNR = 19.5-13=6.5$ dB. O transmisie necodată ar asigura 1 bit/simb folosind 2-PSK la $SNR = 9.5$ dB;

- Considerând același cod, dar o modulație 64+QAM → ca numărul de biți utili este $n=6 \cdot 1/4=1.5$ bit/simb; probabilitatea de eroare de simbol $p_e = 10^{-5}$ se asigură la $SNR = 25.5-13=12.5$ dB. O transmisie necodată ar asigura 2 bit/simb folosind 4+QAM la $SNR = 12.5$ dB;

- Exemplele de mai sus arată utilizarea codurilor cu rată mică este rentabilă doar la valori mici ale SNR

- Datorită ratei mici aceste coduri au mai multe ecuații de control, deci mai multe constrângeri între biți

- Codurile cu același rate și aceeași lungime și $j = 2$ au un girth mai mare, dar asigură un câștig mai mic datorită numărului mai mic de ecuații de control în care intră un bit
- Trebuie remarcat încă o dată compromisul între valoarea lui $j = 3$, și valoarea girth-ului mediu.

d. Efectul numărului de iterații efectuate de decodor

- Valoarea C_G asigurată de un cod dat crește odată cu creșterea numărului de iterații efectuate de algoritmul iterativ de decodare, de exemplu MP, înainte de oprirea decodării.
- Totuși, efectuarea unui număr de iterații mai mare decât o valoare I , nu mai aduce o creștere suplimentară a C_G care să justifice întârzierea introdusă.
- Valoarea lui I depinde de lungimea minimă a buclelor din graful Tanner, și implicit de tipul codului, de rata și de lungimea acestuia.
- Simulările efectuate au arătat că $I = 25$ reprezintă un compromis rezonabil între câștigul asigurat și întârzierea introdusă

1.7.2. Prescurtarea codurilor LDPC

- Prescurtarea codurilor LDPC se realizează pentru unul din următoarele scopuri:

- adaptarea lungimii cuvântului de cod la dimensiunile pachetului de date ce poate fi transmis de un anumit sistem de transmisie
- obținerea unor rate de codare ce nu pot fi obținute prin construcția codului.
- pentru a obține un cod de rată dată, care să asigure un C_G mai mare decât un cod complet construit direct la acea rată.

- Deoarece numărul de biți de control rămâne același, rata codului prescurtat e mai mică decât rata codului „părinte”: $R_c' = (N-M-U)/(N-U) < R_c$ (28)

- Prescurtarea poate fi făcută în două moduri: prin suprimarea celor mai din dreapta U coloane ce corespund ultimilor U biți de informație (notată cu CS) sau prin suprimarea a U coloane, din cele $N-M$ ale biților info, care au girth-ul cel mai mic (notată cu GS)

- Pentru exemplificare în figura 11 se prezintă curbele BER vs. SNR ale unor coduri cu rată $R_c = 0.4$ având $k=6$ and $j=3$ și lungimi de 977 sau 960 biți/ cuvântul de cod.

- Primele două coduri au fost obținute prin prescurtarea unui cod cu $N' = 1200$ biți și rată $R_c' = 0.5$ la o lungime de $N = 977$ biți, obținându-se rata $R_c = 0.39$. Prescurtarea a fost făcută fie cu metoda GS (linia roșie), fie cu CS (linia albastră).

- Al treilea cod (linia verde) a fost generat direct la lungimea de $N = 960$ biți cu rata $R_c = 0.4$.

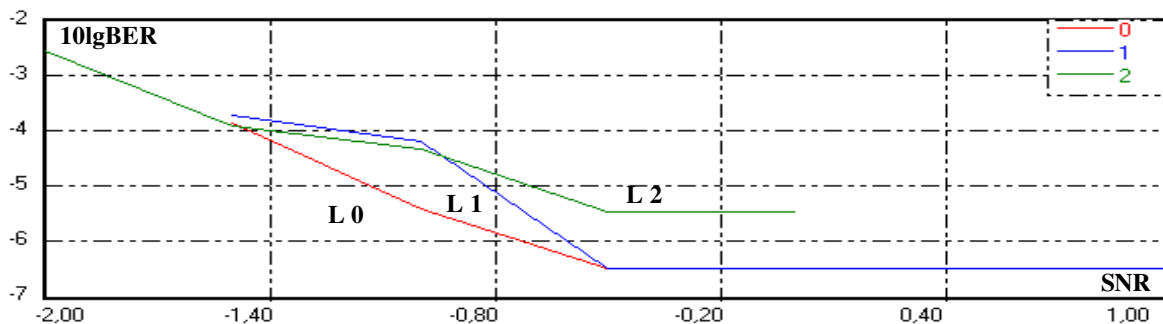


Figura 11. BER vs. SNR ale codurilor prescurtate; $R_c=0.39$ sau 0.4 , $j=3$ și $k=6$
Linia 0 – GS $N=977$; Linia 1 – CS; $N= 977$; Linia 2 – cod neprescurtat $N= 960$

- Codurile prescurtate asigură un câștig al codării mai mare decât cel neprescurtat deoarece girth-rile lor medii sunt mai mari, 8.19 și 7.6 față de 7.27 al codului neprescurtat.
- De asemenea prescurtarea selectivă pe bază de girth (GS) aduce un câștig mai mare, cu circa 0.3 dB, decât cea neselectivă (CS), datorită creșterii girth-ului mediu.
- În standardul 5G NR adaptarea lungimii codului la resursele timp-frecvență disponibile (numărul de simboluri QAM) se face pe baza unui algoritm de tip „rate-matching”. Astfel în primul chunk se transmite o prima parte a cuvântului de cod, în al doilea chunk se transmite o a doua parte, fiind prevăzute până la patru grupuri de biți; pot exista și suprapunerii, adică biți care sunt transmiși de două ori

1.7.3. Performanțele codurilor LDPC de tip array

- Câștigurile codării asigurate de codurile LDPC de tip array, la o aceeași lungime, rată și valori ale k și j sunt mai mici decât cele ale asigurate de codurile LDPC random, datorită și faptului că girth-ul mediu al

codurilor array este mai mic, el nedepășind valoarea 6, datorită modalității de construcție a acestor coduri.

- Spre exemplificare în figura 12 sunt prezentate curbele BER vs. SNR a patru coduri LDPC random și a unui cod LDPC array cu lungimea $N = 1200$ și rata $R_c = 0.5$.

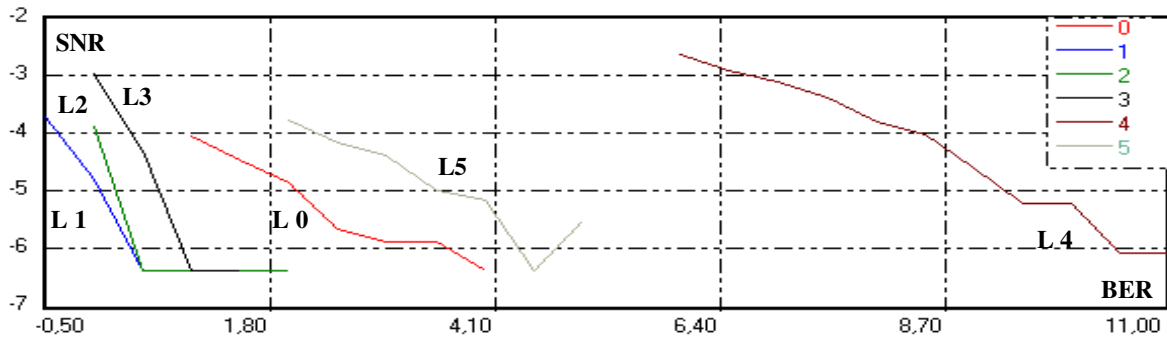


Figura 12. BER vs. SNR ale unor coduri random și array
 Linia 0 – random $k=4, j=2$; Linia 1 – random $k=6, j=3$; Linia 2 – random $k=8, j=4$; Linia 3 – random $k=10, j=5$; Linia 4 – necodată Linia 5 – triangularizat (array)

- Codul array (linia gri) are un câștig (6,5 dB) sensibil mai mic decât cele ale codurilor random, care variază între 7 și 10 dB, în funcție de valorile parametrilor k și j . Valoarea girth-ului mediu al codului array este 5.25, pe când girthurile codurilor random variază între 7.25 ($j = 3$) până la 12.26 ($j = 2$).
- Și la lungimi mai mici ale cuvântului de cod, codurile de tip random asigură câștiguri mai mari decât codurile de tip array, dar diferența între câștiguri scade cu scăderea lungimii cuvântului de cod.
- Spre exemplificare în figura 13 sunt prezentate curbele BER vs. SNR ale unor coduri random și a unui cod array cu $N = 240$ biți și rata $R_c = 0.5$.

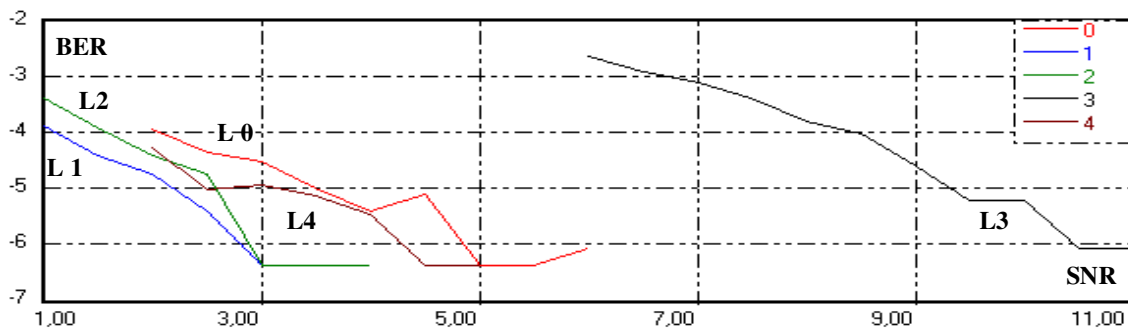


Figura 13 BER vs. SNR ale unor coduri random și de array
 Linia 0 – random $k=4, j=2$; Linia 1 – random $k=6, j=3$; Linia 2 – random $k=8, j=4$; Linia 3 – necodată Linia 4 – cod array cu rata 0.5

- În acest caz diferența dintre cel mai puternic cod random și codul array e de doar 2 dB, iar codul array poate asigura un câștig al codării mai mare decât unele coduri random mai puțin performante, având $j = 2$.
- Performanțele codurilor de tip “quasi-cyclic” din 5G NR vor fi prezentate la laborator

Concluzii

- Dintre clasele decoduri menționate, codurile random asigură câștigurile cel mai mari. Există coduri LDPC random care, pentru rate scăzute, se apropie de la câteva zecimi de decibeli de limita teoretică a lui Shannon și au performanțe comparabile cu (sau chiar mai bune decât) turbocodurile.
- Codurile “array-based” asigură câștiguri mai mici decât cele random, diferențele depinzând de lungimea și rata studiate.
- Câștigul codării asigurat crește odată cu scăderea ratei codului
- La o rată dată, câștigul codării crește (de obicei) cu creșterea lungimii cuvântului de cod
- Câștigul codării e maxim pentru valori mici ale parametrului j , dar trebuie ca $j > 2$
- Pentru un cod dat, C_G crește cu creșterea numărului de iterații efectuate de algoritmul de decodare MP; trebuie însă menționat că la mărirea numărului de iterații efectuate peste 25, C_G suplimentar este extrem de mic, față de cel obținut cu 25 de iterații, nejustificând creșterea timpului de decodare indusă.
- Performanțele codurilor LDPC vor fi studiate la laborator.

[1] Lab Transmisiuni de date, UTCN, “Study of the Girth Characteristics of some LDPC Codes and their Influence upon the BER Performances”, Research Report